



Shteyner teoremasini Python muhitida loyihaviy yondashuv asosida o'qitish metodikasi

Dilmurodov Shavkat Dilmurod o'g'li –

Qarshi davlat universiteti umumiy fizika kafedrası o'qituvchisi,

E-mail: dilmurodovshavkat1@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-5804-4661>

Telefon: +998 99 420-45-00

Annotatsiya. Maqolada Shteyner teoremasini analitik hisoblash, Python muhitida sonli modellashtirish va natijalarni tekshirishni birlashtiruvchi loyihaviy o'qitish metodikasi taklif etiladi. Tadqiqotning maqsadi bir jinsli ingichka sterjen misolida fizik faraz, matematik model, dasturiy algoritmi va xulosaning o'zaro bog'lanishini ochib beradigan o'quv topshiriqlarini ishlab chiqishdan iborat. Nazariy tahlil, metodik loyihalash va hisoblash orqali tekshirish usullari qo'llanildi. Sterjenni teng bo'laklar markazlarida joylashgan nuqtaviy massalar bilan almashtirish natijasidagi xato analitik yo'l bilan aniqlandi. Hisoblashlarda ushbu xatoning bo'laklar soni kvadratiga teskari mutanosibli tekshirildi. Metodik natija bashorat qilish, model tuzish, kodlash, tekshirish, tuzatish va individual himoyadan iborat loyiha bosqichlari tizimidir. Keltirilgan natijalar hisoblash modeliga tegishli bo'lib, metodikaning ta'lim samaradorligi haqidagi empirik dalil sifatida talqin qilinmaydi.

Kalit so'zlar: Shteyner teoremasi, mexanika, Python, loyihaviy ta'lim, inersiya momenti, diskret model, hisoblash xatosi, raqamli kompetentlik, sonli modellashtirish, individual himoya, analitik tekshirish.

Методика обучения теореме Штейнера в среде Python на основе проектного подхода

Аннотация. В статье предложена методика проектного обучения теореме Штейнера, объединяющая аналитический расчёт, численное моделирование в среде Python и проверку результатов. Цель исследования заключается в разработке учебных заданий, раскрывающих связь между физическими допущениями, математической моделью, программным алгоритмом и выводами на примере однородного тонкого стержня. Используются теоретический анализ, методическое проектирование и вычислительная проверка. Аналитически определена погрешность замены равных участков стержня точечными массами, расположенными в их серединах. Расчёты подтверждают, что погрешность обратно пропорциональна квадрату числа участков. Методический результат представляет собой последовательность прогнозирования, построения модели, программирования, проверки, исправления и индивидуальной защиты проекта.

Предложены контрольные случаи и критерии оценивания объяснений студента. Представленные результаты относятся к вычислительной модели и не рассматриваются как эмпирическое доказательство образовательной эффективности методики.

Ключевые слова: теорема Штейнера, механика, Python, проектное обучение, момент инерции, дискретная модель, вычислительная погрешность, цифровая компетентность, численное моделирование, индивидуальная защита, аналитическая проверка.

A project-based methodology for teaching the parallel-axis theorem using Python

Annotation. This article proposes a project-based methodology for teaching the parallel-axis theorem by integrating analytical calculation, numerical modelling in Python, and verification. The study aims to develop learning tasks that connect physical assumptions, mathematical models, algorithms, and conclusions using a uniform thin rod. The methods comprise theoretical analysis, instructional design, and computational verification. The error introduced by replacing equal rod segments with point masses at their midpoints is derived analytically. Numerical calculations verify that this error decreases inversely with the square of the number of segments. The methodological outcome is a sequence of prediction, modelling, coding, verification, revision, and individual defence. The reported results concern the computational model and do not constitute empirical evidence of educational effectiveness.

Keywords: parallel-axis theorem, mechanics, Python, project-based learning, moment of inertia, discrete model, numerical error, digital competence, numerical modelling, individual defence, analytical verification.

KIRISH

Inersiya momentini o'qitishda ko'pincha jism shakliga mos formula tanlash va unga son qo'yish ustun turadi. Biroq aylanish o'qi o'zgarganda massaning o'qqa nisbatan taqsimlanishi ham o'zgaradi. Talaba bu bog'lanishni tushunmasa, massa markazidan o'tmaydigan o'qni noto'g'ri tanlashi yoki Shteyner teoremasini parallel bo'lmagan o'qlarga tatbiq etishi mumkin. Hisoblash loyihasi bunday xatoni ko'rinadigan tekshiruv vazifasiga aylantiradi. Maqolaning maqsadi bir jinsli sterjen misolida analitik modeldan kodga, koddan tekshiruv va fizik xulosaga olib boruvchi o'quv loyiha metodikasini ishlab chiqishdir. Tadqiqot savoli: talaba sonli modeldagi xatoni fizik mazmun bilan bog'lab tushuntirishi uchun loyiha qaysi bosqich va nazorat holatlarini qamrab olishi kerak? Ishning natijasi darsda qo'llash uchun taklif etilayotgan topshiriqlar tizimi va tekshirilgan hisoblash namunasidir.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODLAR

Muallifning avvalgi ishida yarimo'tkazgichli qurilma yaratish loyihasi [1], boshqa maqolalarida esa kompetentlikni rivojlantirish modeli [3; 2] bayon etilgan. Ushbu maqolada qurilma yaratish yoki umumiy modelni takrorlash o'rniga mexanik qonunni tekshiriladigan hisoblash mahsulotiga aylantirish bosqichlari ishlab chiqiladi. Oldingi pedagogik natijalar ushbu metodikaning samaradorligi deb olinmaydi.

Raqamli kompetentlikni bilim va amaliy faoliyat bilan bog'lash uchun DigComp 2.2 [10; p. 3], loyiha bosqichlarida izlanish, tanlov va qayta ishlashni tashkil etish uchun PBLWorks manbasi [7; Essential Project Design Elements bo'limi] nazariy tayanch vazifasini bajaradi. Python [8; The Python Tutorial bo'limi], NumPy [5; NumPy: the

absolute basics for beginners bo'limi] va Matplotlib [4; Quick start guide bo'limi] hujjatlari kod tuzilishi, massivli hisoblash va grafik yaratishga oid amallarni aniqlashtirish uchun ishlatiladi. Ochiq ta'lim resursidan foydalanilganda manba hamda moslashtirilgan qismni ko'rsatish zarurati UNESCO tavsiyasi bilan bog'lanadi [9; Recommendation on Open Educational Resources bo'limi]. Teoremaning fizik shartlari va inersiya momentining integral ta'rifi OpenStax darsligidagi bayonga tayanadi [6; 10.5-bo'lim]. Ushbu ishda o'quv samarasi va matematik natija alohida talqin qilinadi.

Ish nazariy-metodik loyihalash va deterministik hisoblash namoyishiga asoslanadi. Fizik obyekt sifatida uzunligi L , massasi M bo'lgan bir jinsli ingichka sterjen tanlanadi. Sterjen x o'qi bo'ylab joylashgan; massa markazi $x = 0$ nuqtada. Aylanish o'qi sterjenga perpendikulyar va markaziy o'qqa parallel bo'lib, sterjen chizig'ini $x = a$ nuqtada kesadi. Kesim o'lchami uzunlikka nisbatan e'tiborga olinmaydi. Hisoblashda sterjen N teng bo'lakka ajratiladi va har bir bo'lak massasi uning o'rtasida jamlangan nuqtaviy massa bilan almashtiriladi. Bu yaqinlashtirishning xatosi analitik formula bilan qiyoslanadi. Pedagogik qismda loyiha bosqichlari, topshiriladigan dalillar va individual himoya savollari loyihalanadi. Haqiqiy talabalar guruhidagi o'zlashtirish natijalari o'lchanmagan; hisoblash jadvali o'quvchilar natijasi emas.

NATIJALAR VA MUHOKAMA

Analitik va diskret model. Bir jinsli sterjenning chiziqli zichligi $\lambda = M/L$. Tanlangan o'qqacha masofa $|x - a|$ bo'lgani uchun inersiya momenti $I(a) = (M/L) \int (x - a)^2 dx$ orqali olinadi; integral chegaralari $-L/2$ va $L/2$. Kvadratni ochganda x ga nisbatan toq hadning integrali nol bo'ladi. Natijada $I(a) = ML^2/12 + Ma^2$ ifodasi kelib chiqadi. Massa markazidan o'tuvchi o'qqa nisbatan $I(0) = ML^2/12$; $a = L/2$ da esa $I = ML^2/3$.

Diskretlashda $x_j = -L/2 + (j + 1/2)L/N$, $j = 0, \dots, N - 1$. Har bir nuqtaning massasi M/N , shuning uchun $I_N(a) = (M/N) \sum (x_j - a)^2$. Simmetriya sababli $\sum x_j = 0$ bo'ladi. O'rta nuqtalar kvadratlari yig'indisi orqali $I_N(a) = (ML^2/12)(1 - 1/N^2) + Ma^2$ natijasi olinadi. Demak, analitik va sonli qiymat farqi $\Delta I = I - I_N = ML^2/(12N^2)$.

Ushbu ifoda bo'laklarning o'z markaziga nisbatan inersiya momentlarini tashlab ketishdan kelib chiqadi. Har bir bo'lak uchun yetishmayotgan hissa $(1/12)(M/N)(L/N)^2$; N ta bo'lak uchun yig'indi aynan $ML^2/(12N^2)$ ga teng. Agar shu ichki hissa qo'shilsa, ideal bir jinsli sterjen modeli doirasida natija analitik ifodaga teng bo'ladi. Talabaga bu farq dastur xatosi emas, tanlangan yaqinlashtirish oqibati ekanini tushuntirish vazifasi beriladi.

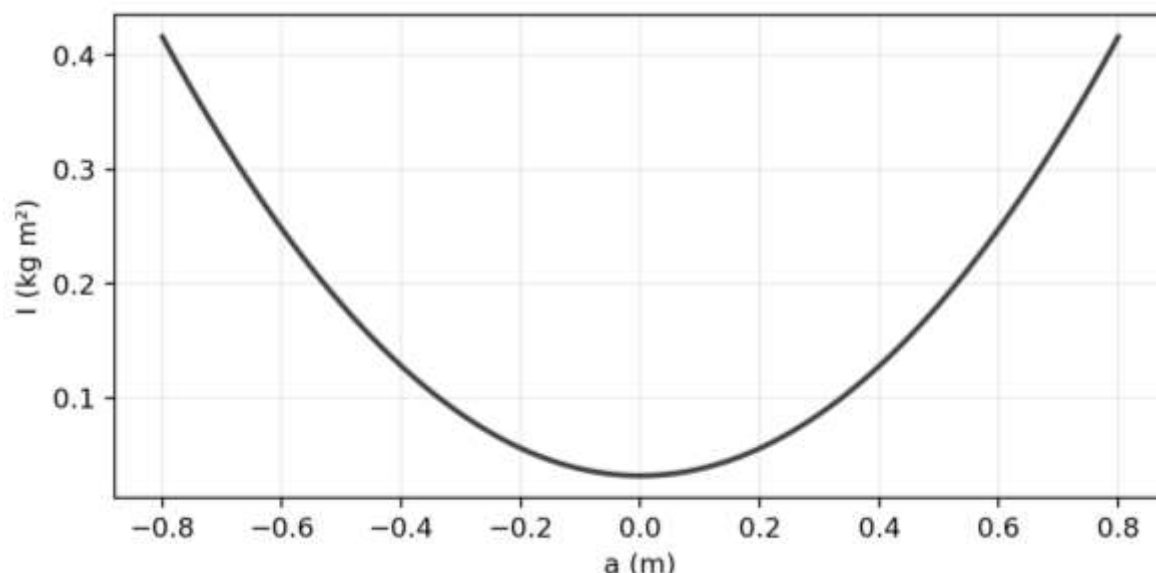
Hisoblash namunasini tekshirish. Qayta bajarish uchun $M = 0,6$ kg va $L = 0,8$ m olindi. Markaziy o'q uchun aniq qiymat $0,032$ kg·m², sterjen chetidan o'tuvchi parallel o'q uchun $0,128$ kg·m² bo'ladi. Hisoblash jadvalida $a = 0$ holati ko'rsatilgan. N ikki marta oshirilganda absolyut xato to'rt marta kamayadi. Jadvaldagi qiymatlar Python kodi orqali qayta hisoblanib, analitik xato formulasi bilan taqqoslandi.

1-jadval.

Markaziy o'q uchun diskretlash xatosi

N	I_N , kg·m ²	ΔI , kg·m ²	Nisbiy xato, %
10	0.031680	0.000320	1.000000
20	0.031920	0.000080	0.250000
40	0.031980	0.000020	0.062500
80	0.031995	0.000005	0.015625

Nisbiy xato $\varepsilon = 100|I - I_N|/I$ orqali hisoblanadi. Markaziy o'qda $\varepsilon = 100/N^2$ bo'ladi. a o'zgarganda absolyut diskretlash xatosi ushbu modelda saqlanadi, ammo $I(a)$ oshgani uchun nisbiy xato kamayadi. Buni fizik modelning barcha sharoitlarda aniqroq bo'lib qolishi deb izohlash noto'g'ri: o'zgarish maxrajning kattalashishi bilan bog'liq. Suzuvchi nuqtali hisoblashda juda katta N uchun yaxlitlash ham ta'sir qilishi mumkin.



1-rasm. $M = 0,6$ kg va $L = 0,8$ m uchun $I(a)$ bog'lanishi.

Grafik a ning musbat va manfiy qiymatlari uchun simmetrik; minimum massa markazidan o'tuvchi o'qqa to'g'ri keladi. Bu yerda a koordinata sifatida ishorali, o'qlar orasidagi geometrik masofa esa $|a|$ dir. Sterjen tashqarisidagi parallel o'qlar ham teorema doirasida ko'rib chiqilishi mumkin. Grafikni kuzatishdan oldin talaba ushbu xususiyatlarni formula asosida bashorat qilishi so'raladi.

Python dasturi va nazorat testlari

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
M, L = 0.6, 0.8

def exact(a):
    return M * L**2 / 12 + M * a**2

def midpoint(a, n):
    x = -L/2 + (np.arange(n) + 0.5)*L/n
    return (M/n) * np.sum((x-a)**2)

for n in (10, 20, 40, 80):
    val = midpoint(0.0, n)
    err = exact(0.0) - val
    assert np.isclose(err, M*L**2/(12*n**2))
    print(n, f"{val:.6f}", f"{err:.6f}")
    assert np.isclose(exact(L/2), M*L**2/3)
    assert np.isclose(midpoint(0.2, 40),
        midpoint(-0.2, 40))
    a = np.linspace(-L, L, 401)
    plt.plot(a, exact(a))
    plt.xlabel("a (m)")
    plt.ylabel("I (kg m^2)")
    plt.grid()
    plt.show()
```

Kodda `exact` funksiyasi analitik qiymatni, `midpoint` funksiyasi nuqtaviy yaqinlashtirishni hisoblaydi. Birinchi assert xato formulasini, ikkinchisi chetki o'q natijasini, uchinchi simmetriyani tekshiradi. Bu testlar barcha mumkin bo'lgan xatolarni aniqlash kafolati emas. Talaba ularning qaysi farazni tekshirishi va qaysi holatni qamrab olmasligini

izohlashi lozim. Dastur NumPy va Matplotlib o'rnatilgan Python muhitida bajariladi; ishlatilgan versiyalar yakuniy loyiha hisobotida qayd etiladi.

Loyihaviy mashg'ulotni tashkil etish.

2-jadval.

O'quv loyihasining bosqichlari

Bosqich	Talaba faoliyati	Mahsulot yoki dalil
Muammo	O'q siljiganda I qanday o'zgarishini bashorat qilish	Fizik savol va faraz
Model	O'qlar va massa taqsimotini belgilash	Chizma va analitik ifoda
Hisoblash	Diskret modelni kodga o'tkazish	Ishlaydigan dastur
Tekshirish	Chegaraviy holat, simmetriya va N ta'sirini tekshirish	Test va xato jadvali
Tuzatish	Ichki inersiya hissasini qo'shib taqqoslash	Ikki model izohi
Himoya	Tanlov va xulosalarni mustaqil tushuntirish	Qisqa hisobot va individual javob

Loyiha kichik guruhda bajarilishi mumkin, lekin har bir talabaga alohida parametr yoki nazorat holati beriladi. Bir talaba formulani chiqarib, boshqasi kod yozgan bo'lsa ham, yakunda ikkalasi model va algoritmnining bog'lanishini tushuntirishi kerak. O'qituvchi kodni tayyor javob sifatida emas, dastlab izohlash, keyin o'zgartirish va tekshirish uchun namuna sifatida beradi. Talaba o'zi kiritgan o'zgarishni versiyalar orqali qayd etadi. Individual himoyada to'rtta mezonidan foydalanish taklif etiladi: fizik shartlarni asoslash, analitik va diskret modellarni bog'lash, kod hamda nazorat testlarini izohlash, natijadagi xatoni fizik talqin qilish. Har bir mezon 0 dan 2 ballgacha baholanadi: 0 ball – izoh berilmagan yoki noto'g'ri; 1 ball – qisman to'g'ri, ammo asoslash to'liq emas; 2 ball – mustaqil va asosli tushuntirilgan. Jami 8 ballik ushbu mezonlar muallifning metodik taklifi bo'lib, ularning ishonchiligi pedagogik sinovda tekshirilishi lozim. Tabaqalashtirishda boshlang'ich daraja uchun markaziy va chetki o'qlar, keyingi daraja uchun N bo'yicha yaqinlashish, chuqurlashtirilgan topshiriq uchun esa bir jinsli bo'lmagan zichlik taklif etiladi. Oxirgi holatda massa markazi qayta hisoblanishi shart; avvalgi koordinata boshini avtomatik massa markazi deb olish mumkin emas. Ushbu murakkab variantning yangi formulasi va testi alohida ishlab chiqiladi, tayyor sterjen formulasi ko'r-ko'rona qo'llanilmaydi.

Muhokama va pedagogik tekshirish chegaralari. Ushbu metodikada asosiy natija grafikning yaratilishi emas, analitik va sonli natijalar orasidagi farqni fizik izohlashdir. Shu jihatdan u faqat vizual namoyishdan kengroq faoliyatni talab qiladi. Biroq kodning to'g'ri ishlashi talabalarning mavzuni o'zlashtirganini isbotlamaydi. Bu ikki natijani ajratish pedagogik xulosaning dalillarga mos bo'lishi uchun zarur. Keyingi pedagogik sinovda bir xil boshlang'ich tayyorgarlikdagi guruhlar, oldindan belgilangan savollar va baholash tartibi qo'llanishi kerak. O'qlar parallelligi, massa markazi, xato sababi va yangi vaziyatga ko'chirish bo'yicha individual topshiriqlar berilishi mumkin. Shaxsiy ma'lumotlar va rozilik masalalari muassasa tartibiga muvofiq hal etiladi. Hozirgi maqolada bunday sinov o'tkazilmagani sababli o'sish foizi yoki statistik ahamiyatlilik keltirilmaydi.

XULOSA

Shteyner teoremasini loyihaviy o'qitish analitik asoslash, diskretlash, kodlash va tekshirishning izchil bog'lanishiga qurilishi mumkin. Bir jinsli sterjen uchun o'rta nuqtalar modelining xatosi $ML^2/(12N^2)$ ekani keltirib chiqarildi va hisoblash orqali tekshirildi. Darsda talabalardan ushbu xatoni tushuntirish, bo'lakning ichki inersiya hissasini tiklash hamda chegaraviy holatlarni himoya qilish talab etilishi tavsiya etiladi. Taqdim etilgan

hisoblash namunasining to'g'riligi tekshirilgan; metodikaning o'quv samaradorligi esa keyingi pedagogik tadqiqot mavzusi bo'lib qoladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Dilmurodov Sh. Bo'lajak fizik mutaxassislarining raqamli texnologik kompetentligini loyihaviy yondashuv asosida rivojlantirish metodikasi // Ta'lim, fan va innovatsiya. 2025. № 10. B. 73–78.
2. Dilmurodov Sh. D. Bo'lajak fizika yo'nalishi talabalariga raqamli texnologik kompetentligini rivojlantirish asosida pedagogik modelini qurish // Qo'qon DPI. Ilmiy xabarlar. 2025. № 11. C seriya. B. 511–517.
3. Dilmurodov Sh. Oliy ta'lim muassasalarida fizika yo'nalishi talabalarining raqamli texnologik kompetentligini rivojlantirishning nazariy-pedagogik modeli // Ta'lim, fan va innovatsiya. 2025. № 12. B. 6–11.
4. Matplotlib Development Team. Quick start guide. https://matplotlib.org/stable/users/explain/quick_start.html (murojaat sanasi: 20.10.2026).
5. NumPy Developers. NumPy: the absolute basics for beginners. https://numpy.org/doc/stable/user/absolute_beginners.html (murojaat sanasi: 20.10.2026).
6. OpenStax. University Physics Volume 1. Section 10.5 Calculating Moments of Inertia. <https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/10-5-calculating-moments-of-inertia> (murojaat sanasi: 20.10.2026).
7. PBLWorks. Gold Standard PBL: Essential Project Design Elements. <https://www.pblworks.org/gold-standard/pbl-project-design> (murojaat sanasi: 20.10.2026).
8. Python Software Foundation. The Python Tutorial. <https://docs.python.org/3/tutorial/> (murojaat sanasi: 20.10.2026).
9. UNESCO. Recommendation on Open Educational Resources (OER). 25 November 2019. <https://www.unesco.org/en/legal-affairs/recommendation-open-educational-resources-oer> (murojaat sanasi: 20.10.2026).
10. Vuorikari R., Kluzer S., Punie Y. DigComp 2.2: The Digital Competence Framework for Citizens — With new examples of knowledge, skills and attitudes. Luxembourg: Publications Office of the European Union, 2022. EUR 31006 EN. P.3. DOI: 10.2760/115376.